УДК 517.9

М.Є. Дудкін (Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського", Київ)

Метод Березанського Ю.М. у проблемі моментів

Робота присвячена 100-річчю від дня народження Ю.М.Березанського 8.05.1925 – 7.06.2019.

В огляді основних сучасних положень проблеми моментів обговорюється важливість використання метода Березанського Ю.М. – розкладу за узагальненими власними векторами. Такий підхід є на сьогодні єдино коректним до розв'язання проблеми моментів у різних постановках.

In the review of the main modern positions of the moment problem, the importance of using the method of Berezansky Yu.M. - the expansion by generalized eigenvectors – is discussed. This approach is currently the only correct one for solving the moment problem in different formulations.

1. Вступ.

Проблема моментів є відомою із давніх робіт Чебишева П.Л., Маркова А.А., Стільтієса Т.

Научное наследие П.Л.Чебышева, Сборник статей под ред. С.Н.Бернштейна, изд. АН СССР, 1945, вып. 1, Математика, 1-174.

Избранные труды, Гостехиздат, 1948 (библеографический очерк с примечаниями Н.И.Ахиезера)

T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Anns. Fac. Sci. Univ. Toulouse 8 (1894-1895), J1-J122; 9, A5-A47.

У сучасному найпростішому формулюванні, або класична проблема моментів полягає у відшуканні міри $d\rho(x)$ на дійсній прямій ($x \in \mathbb{R}$) для заданої послідовності дійсних чисел $\{s_n\}$, $s_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, ...\}$, так що виконується зображення

$$s_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, d\rho(x). \tag{1}$$

Розв'язок класичної проблеми методом теорії функцій наведений у книзі

Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. – М.: Гос. физ.-мат. лит, 1961. – 312 с.

яка у статті Simon B. названа "діамантом":

Barry Simon The Classical Moment Problem as a Self-Adjoint Finite Difference Operator Advances in Mathematics 137, 82-203 (1998)

Проте лише у IV-м розділі книги Ахієзера Н.І. наведені спостереження методами теорії операторів. Ці спостереження часто помилково використовують у якості метода розв'язання, оскільки вони мають деяку логічну прогалину.

Розв'язання традиційно починається із додатної визначеності, яка завжди є необхідною умовою існування роз'язку (чи багатьох розв'язків). Тобто, якщо зображення (1) виконується, то

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}_0} s_{n+m} f_n \bar{f}_m \geq 0, \tag{2}$$

для довільної скінченої послідовності (f_n), $f_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Цей факт дає підстави ввести скалярний добуток на поліномах x^n, $n \in \mathbb{N}_0$ за правилом

$$(x^n, x^m) = s_{n+m}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

який задає гільбертів простір $\mathcal{H}$ (деякий L_2 на $\mathbb{R}$) зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ визначеним на щільній в $\mathcal{H}$ множині $\mathfrak{D} := \{x^n\}$.

Sz-Nagy, B., Koranyi, A. Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie. Acta Math. 100, 171–202 (1958).

Тоді оператор зсуву $(Jf) = f_{j-1}$ має спектральну міру dE_λ, яка веде до зображення (1)

$$s_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, d(E_\lambda e_0, e_0), \tag{4}$$

де e_0 циклічний вектор. Зображення (4) є єдиним у такій послідовності міркувань, якщо оператор є істотно самоспряженим. Цей факт гарантує, наприклад, критерій Карлемана, тобто якщо рад $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_{2n}^{-\frac{1}{2n}}$ розбігається.

Nelson E. Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**. – P. 572–614.

Nussbaum A.E. Quasi-analytic vectors // Ark. Math. – 1965. – **6**, № 10. – P. 179–191.

Nussbaum A.E. A note on quasi-analytic vectors // Studia Math. – 1969. – **33**. – P. 305–309.

Припустимо, що оператор J взагалі є обмеженим. Тоді згідно із наведеними міркуваннями розв'язок існує і єдиний.

Але проблема полягає у тому, що простір $\mathcal{H}$ не визначається однозначно за множиною $\mathfrak{D}$, якщо скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, а отже і норма, визначені лише на $\mathfrak{D}$.

Приклади двох різних гільбертових просторі, норми яких збігаються на щільній (в обох просторах) множині, побудовані в роботах Кошманенко В.Д., використовуючи дослідження сингулярно збурених операторів.

Albeverio S., Bozhok, V. Koshmanenko The rigged Hilbert spaces approach in singular perturbation theory, Rep. Math. Phys. 58, No 2, 227-246 (2006)

Кошманенко В., Дудкін М.Є. Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. Праці інституту математики НАН України т.96, Київ 2013. 320 с.

Особливо цікавим є приклад Ніжніка Л.П., де простори мають ще й не еквівалентні норми. Такий ефект вже був відомим в роботі

Burachewski A, Radyno Ya, Antonevich A. On closability of nonclosable operators. Panamerican Mathematical Journal. 1997; 7(4):37–51.

Єдино правильним відомим на сьогодні є метод Березанського Ю.М., який використовує розклад за узагальненими власними векторами, описаний в монографії:

Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. -– Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с., English transl., Amer. Math., Soc., Providence, R.I., 1968. – 450 p.

Найбільш просто і лаконічно підхід викладено в статті:

Berezansky Yu.M. Some generalizations of the classical moment problem // Integr. equ. Oper. Theory. – 2002. – **44**. – P. 255–289.

Проте останнім часом в роботах західних колег цей факт ігнорується. Показовим є приклад із роботою Ескіна Г.И.

Ескин Г.И. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов // ДАН СССР. – 1960. – Т. 133, № 3. – С. 540-543.

де наведені умови розв'язання багатовимірної проблеми моментів, але робиться правильне застереження, проте що розв'язок може бути не єдиним. А робота

Petersen L.C. On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem // Math. Scand. – 1982. – **51**. – P. 361–366.

спирається на роботу Ескіна Г.И., додає умови єдиності існування розв'язку тієї ж багатовимірної проблеми моменті без урахування того, яким чином отримані умови існування.

Подальша програма: попередні відомості з теорії розкладу за узагальненими власними векторами для розв'язання класичної проблеми моментів; власне розв'язання класичної проблеми моментів; приклади не єдиності побудови гільбертового простору за заданою щільною множиною.

1. Попередні відомості.

Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений оператор A, визначений на $\mathfrak{D}(A)$. Розглянемо оснащення простору $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset \mathcal{D}, \tag{5}$$

де $\mathcal{H}_+$ — гільбертів простір, топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}_-$ — простір дуальний до $\mathcal{H}_+$ відносно простору $\mathcal{H}$; $\mathcal{D}$ є лінійним топологічним простором, топологічно вкладеним в $\mathcal{H}_+$.

Нагадаємо, що оператор A називається стандартно пов'язаним із оснащенням (5), якщо $\mathcal{D} \subset \mathfrak{D}(A)$ і звуження $A \restriction \mathcal{D}$ діє з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}_+$ неперервно.

Також нагадаємо, що вектор $\Omega \in \mathcal{D}$ називається строго циклічним для оператора A, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $\Omega \in \mathfrak{D}(A^n) \in \mathcal{D}$ і множина всіх векторів $A^n\Omega$, для $n = \mathbb{N}_0$ є тотальною у просторі $\mathcal{H}_+$ (а отже, і в $\mathcal{H}$).

Припускаючи, що строго циклічний вектор існує, сформулюємо деякий скорочений варіант проективної спектральної теореми (див. [2], розділ 3, теорема 2.7, або [1] розділ 5, [3], розділ 15 і розділ 1, підрозділ 1.11).

Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с., English transl., Amer. Math., Soc., Providence, R.I., 1968. – 450 p.

Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.

Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ: Курс лекций. – Київ: Вища шк., 1990. – 600 с.

Теорема 1 *Для самоспряженого оператора A із строго циклічним вектором у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, існує міра Бореля $d\rho(\lambda)$ на дійсній вісі, така що для ρ-майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ існує узагальнений власний вектор $\xi_\lambda \in \mathcal{H}_-$, тобто для кожного $f \in \mathcal{D}$*

$$(\xi_\lambda, Af)_{\mathcal{H}} = \lambda(\xi_\lambda, f)_{\mathcal{H}}, \quad \xi_\lambda \neq 0. \tag{6}$$

Відповідне перетворення Фур'є F діє за правилом:

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \ni f \mapsto (Ff)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = (f, \xi_\lambda)_{\mathcal{H}} \in L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda)), \tag{7}$$

є ізометричним оператором з одиничною нормою (після його замикання), що діє з простору $\mathcal{H}$ в $L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda))$. Образом оператора A при перетворенні F є оператор множення на незалежну змінну λ в $L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda))$, тобто $(FA)f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$.

Нагадаємо також, що для самоспряженого оператора A, визначеного на $\mathfrak{D}(A)$ в $\mathcal{H}$, вектор $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ називається квазіаналітичним, якщо клас $\mathrm{C}\{m_n\}$, де в цьому випадку $m_n = \|A^n f\|_{\mathcal{H}}$, є квазіаналітичним (клас функцій на $[a,b] \subset \mathbb{R}$ визначений виразом

$$\mathrm{C}(\{m_n\}) = \{g \in C^{\infty}([a,b])\ \exists K > 0, |g^{(n)}(t)| \leq K^n m_n,\ t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0\},$$

звідси він є квазіаналітичним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|A^n f\|_{\mathcal{H}}}} = \infty).$$

Квазіаналітичність вектора використовується у критерії самоспряженості.

2. Класична проблема моментів.

Отже ще раз, під класичною проблемою моментів розуміється, як йшлося вище, задачу про знаходження умов на послідовність (s_n), $n \in \mathbb{N}_0$ ($s_n \in \mathbb{R}$), за яких існує борелівська міра $d\rho(\lambda)$ на дійсній вісі $\mathbb{R}$, так що

$$s_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^n \, d\rho(\lambda),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Розв'язок класичної проблеми моментів міститься у такій теоремі.

Теорема 2 *Послідовність дійсних чисел* (s_n), $n \in \mathbb{N}_0$ *має зображення (8) тоді і тільки тоді, коли вона додатно визначена, тобто*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} s_{n+m} f_m \bar{f}_n \geq 0 \tag{9}$$

на довільних фінітних послідовностях $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *чисел* $f_n \in \mathbb{C}$.

Зображення (8) існує і міра $d\rho(\lambda)$ *єдина, якщо послідовність чисел* (s_n), $n \in \mathbb{N}_0$ *є додатно визначеною і додатково*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2p]{s_{2p}}} = \infty. \tag{10}$$

Зауважимо, що умова (9) є необхідною і достатньою для існування зображення (8), але зображень (мір) може бути багато. Умова (9) разом з (10) гарантують єдиність (міри) зображення (8).

Доведення. Доведемо необхідність умови (9). Якщо послідовність $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ має зображення (8), то для довільної фінітної послідовності $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathbb{C}$ маємо

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} s_{n+m} f_m \bar{f}_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n \right|^2 d\rho(\lambda) \geq 0,$$

що й доводить необхідність.

Перейдемо до доведення достатності. Лінійний простір $\mathbb{C}^\infty$ усіх послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^\infty$, $f_n \in \mathbb{C}$, будемо позначати через l. Нехай $\delta_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, $n \in \mathbb{N}_0$ δ-послідовність (1 стоїть на n-му місті), тоді для кожного вектора $f \in l_{\mathrm{fin}}$ маємо $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \delta_n$. Таким чином

$$\forall f \in l_{\mathrm{fin}}, \quad f = (f_n)_{n=0}^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta_n. \tag{11}$$

Розглянемо лінійний вираз у просторі l:

$$\begin{gathered} \forall f \in l, \quad Jf = J(f_0, f_1, ...) = (0, f_0, f_1, ...); \\ J : (Jf)_n = f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (Jf)_0 = 0, \quad f \in l. \end{gathered} \tag{12}$$

Цей вираз є «оператором типу народження»: для δ-послідовності виконується співвідношення

$$J\delta_n = \delta_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Його звуження на l_2 не буде ермітовим оператором у просторі l_2 але воно буде ермітовим в S, який задається (квазі-)скалярним добутком

$$(f, g)_S = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} f_k \bar{g}_j. \tag{14}$$

Нерівність (9) показує, що (14) (квазі-)скалярний добуток.

Нехай S – гільбертів простір побудований використовуючи (14). Для його побудови потрібно перейти з l_{fin} до класів $\dot{f} \in \dot{l}_{fin}$, де $\dot{l}_{fin}$ – фактор-простір, тобто, $l_{fin}/\{h \in l_{fin} \mid (h, h)_S = 0\}$ і поповнити. З (14) і (12) маємо: $f, g \in l_{\mathrm{fin}}$,

$$\begin{aligned} (Jf, g)_S &= \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} (Jf)_k \bar{g}_j = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} f_{k-1} \bar{g}_j \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k+1} f_k \bar{g}_{j-1} = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} f_k \bar{g}_{j-1} = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} f_k \overline{(Jg)_j} = (f, Jg)_S, \end{aligned} \tag{15}$$

(тут враховано, що згідно з (12) $f_{-1} = g_{-1} = 0$).

З ермітовості випливає можливість коректно визначити у просторі S ермітів оператор $\dot{J}$

$$\dot{J}\dot{f} = (Jf)^{\cdot}, \quad f \in \mathfrak{D}(\dot{J}) = \dot{l}_{fin}.$$

Оператор $\dot{J}$ є дійсним відносно інволюції в S породженою інволюцією

$$l_{fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \to \tilde{f} := (\tilde{f}_n)_{n=0}^{\infty} \in l_{fin}$$

і отже має рівні дефектні числа (або $(0,0)$, або $(1,1)$). Далі розглядаємо випадок $(0,0)$. Більш загальний випадок є в [2] Розділ 8, §1, пункт 4, або [1] Розділ 5, §5, пункти 2.

Позначимо через A замикання $\dot{J}$ у просторі S, якщо $\dot{J}$ є істотно самоспряженим або деяке його самоспряжене розширення в S. І до оператора A буде застосована теорема 1.

Для простоти припускаємо, що моментна послідовність s_n не є виродженою у тому розумінні, що якщо $(f,f)_S = 0$ для деякого $f \in l_{fin}$, то $f = 0$, тепер $\dot{f} = f$, $\dot{J} = J$.

Більш загальний випадок є в [2] Розділ 8, §1, пункт 4, або [1] Розділ 5, §5, пункти 1-3.

Тепер у якості простора (1.1) беремо

$$(l_2(p))_{-,S} \supset S \supset l_2(p) \supset l_{fin}, \tag{16}$$

де $l_2(p)$ – простір l_2 із вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$ і норма задана виразом

$$\|f\|_{l_2(p)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 p_n;$$

а $(l_2(p))_{-,S} = \mathcal{H}_-$ – негативний простір відносно позитивного $l_2(p)$ і S, та покладаємо $\mathcal{D} := l_{fin}$.

Лема 1 *Завжди знайдеться достатньо швидко спадна послідовність $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, така що вкладення $l_2(p) \hookrightarrow S$ буде квазіядерним.*

Доведення. Дійсно, (9) означає, що матриця $K = (K_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, де $K_{jk} = s_{j+k}$, є невід'ємно визначеною, і більш за те

$$|s_{j+k}|^2 = |K_{jk}|^2 \le K_{jj}K_{kk} = s_{2j}s_{2k}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{17}$$

Виберемо послідовність $q = (q_n)_{n=0}^{\infty}$, $q_n \ge 1$, таку що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_{2n}q_n^{-1} < \infty$. Тоді з (14) і (17) випливає

$$\|f\|_S^2 = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} f_k \bar{f}_j \le \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{s_{2j}}{q_j} \right) \|f\|_{l_2(q)}^2.$$

Таким чином, вкладення $l_2(q) \hookrightarrow S$ є топологічним. Але якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n p_n^{-1} < \infty$, то вкладення $l_2(p) \hookrightarrow l_2(q)$ є квазіядерним. Композиція топологічного і квазіядерного вкладень $l_2(p) \hookrightarrow S$ є квазіядерним. ■

Тепер можна оснащення (16) використати для розміщення узагальнених власних векторів, але внутрішня структура $(l_2(p))_{-,S}$ є занадто складною, оскільки складною є структура S. Отже разом із (16) використовується оснащення

$$l = (l_{fin})' \supset l_2(p^{-1}) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{fin}, \tag{18}$$

де $l_2(p^{-1})$ – простір l_2 із вагою $p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ є негативним відносно позитивного $l_2(p)$ і нульового l_2. Ланцюжки (16) і (17) мають спільний позитивний простір $l_2(p)$. Таким чином легко зрозуміти, що негативні простори $(l_2(p))_{-,S}$ і $l_2(p^{-1})$ ізометричні між собою. Використовується така загальна лема.

Лема 2 *Припустимо, що задані два оснащення:*

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+, \quad \mathcal{F}_- \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_+ = \mathcal{H}_+ \tag{19}$$

із рівними позитивними просторами. Тоді існує ізометричний оператор $U : \mathcal{H}_- \to \mathcal{F}_-$, $U\mathcal{H}_- = \mathcal{F}_-$, *такий що*

$$(U\xi, f)_{\mathcal{F}} = (\xi, f)_{\mathcal{H}}, \quad \xi \in \mathcal{H}_-, \quad f \in \mathcal{H}_+ = \mathcal{F}_+. \tag{20}$$

Цей оператор задається виразом: $U = \mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, *де* $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ *і* $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ *– канонічні ізометричні ізоморфізми у ланцюжках відповідно до* $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_+$, $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+$.

Доведення. Так, стандартні оператори $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$: $\mathcal{H}_- \longmapsto \mathcal{H}_+$, $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F}_- \longmapsto \mathcal{F}_+$ є ізометричними операторами між зазначеними просторами. Для таких операторів маємо: $\forall \alpha \in \mathcal{H}_-$, $f \in \mathcal{H}_+$

$$(\alpha, f)_{\mathcal{H}} = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\alpha, f)_{\mathcal{H}_+} = (\alpha, \mathbb{I}_{\mathcal{H}}^{-1} f)_{\mathcal{H}_-}, \quad (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\alpha, \beta)_{\mathcal{H}} = (\alpha, \mathbb{I}_{\mathcal{H}}\beta)_{\mathcal{H}}$$

і аналогічну рівність для другого ланцюжка (19). Використовуючи ці рівності, отримуємо:

$$\begin{aligned}(U\xi, f)_{\mathcal{F}} &= (\mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\xi, f)_{\mathcal{F}} = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\xi, f)_{\mathcal{F}_+} \\ &= (\mathbb{I}_{\mathcal{H}}\xi, f)_{\mathcal{H}_+} = (\xi, f)_{\mathcal{H}}, \quad \xi \in \mathcal{H}_-, \quad f \in \mathcal{H}_+ = \mathcal{F}_+.\end{aligned}$$

□

Застосуємо зараз лему 2. У якості ланцюжка (19) розглядаються (16) і (18). Нехай $\xi_\lambda \in (l_2(p))_{-,S}$ є узагальненим власним вектором оператора A в термінах оснащення (18). У такому випадку, згідно з теоремою 1

$$(\xi_\lambda, Af)_S = \lambda(\xi_\lambda, f)_S, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \; f \in l_{\text{fin}}. \tag{21}$$

Позначимо
$$P(\lambda) = U\xi_\lambda \in l_2(p^{-1}) \subset l,\ P(\lambda) = (P_n(\lambda))_{n=0}^{\infty}.$$
Використовуючи (20), вираз (21) переписується у вигляді
$$(P(\lambda), Af)_{l_2} = \lambda(P(\lambda), f)_{l_2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ f \in l_{\text{fin}}. \tag{22}$$
Відповідне перетворення Фур'є має вигляд
$$S \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = (f, P(\lambda))_{l_2} \in L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda)). \tag{23}$$
Обчислимо $P(\lambda)$. Оператор A визначений у (12) дає
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\bar{f}_n &= \lambda(P(\lambda), f)_{l_2} = (P(\lambda), Af)_{l_2} \\ &= (P(\lambda), Jf)_{l_2} = (JP(\lambda), f)_{l_2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(\lambda)\bar{f}_n, \quad \forall f \in l_{\text{fin}}.\end{aligned} \tag{24}$$
Таким чином,
$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
Без втрати загальності покладається $P_0(\lambda) = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Тепер дві останні формули дають
$$P_n(\lambda) = \lambda^n,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{25}$$
Отже, перетворення Фур'є (23) має вигляд
$$S \supset l_{\text{fin}} \ni f \to (Ff)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n \in L^2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda)), \tag{26}$$
а рівність Парсеваля:
$$(f, g)_S = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \quad f, g \in l_{\text{fin}}. \tag{27}$$
Для побудови перетворення Фур'є (23) і обґрунтування формул (24)-(27) необхідно для оператора A з'ясувати наявність строго циклічного вектора $\Omega = \delta_0 \in l_{\text{fin}}$ у сенсі оснащення (5).

Дійсно це так, оскільки з (13) маємо
$$A^p\Omega = J^p\delta_0 = \delta_p.$$

Рівність Парсеваля (27) безпосередньо веде до зображення (8): згідно з (25), (26) $\hat{\delta}_n = \lambda^n$ і $\hat{\delta}_0 = 1$, та з (14) випливає

$$s_n = (\delta_n, \delta_0)_S = (\hat{\delta}_n, \hat{\delta}_0)_{L_2(\mathbb{R}, d\rho(\lambda))} = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^n \, d\rho(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{28}$$

Отже, перша частина теореми доведена. Для доведення її другої частини необхідно переконатися, що умова (10) веде до самоспряженого оператора A в просторі S.

Для цього розглянемо ермітів оператор, визначений на інваріантній відносно його дії на лінійній множині

$$\mathcal{D} = l_{\text{fin}} = \text{span}\{\delta_n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

виразом $A\delta_n = \delta_{n+1}$, і для $p \geq 1$ маємо $A^p \delta_n = \delta_{n+p}$.

Згідно з (14), простір S має норму $\|f\|_S = \sqrt{(f, f)_S}$. Отже, для кожного $\delta_n \in \mathcal{D}$ маємо $\|A^p \delta_n\|_S^2 = \|\delta_{n+p}\|_S^2 = s_{2n+2p}$. Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\|A^p \delta_n\|}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2p]{s_{2n+2p}}},$$

то можна стверджувати, що квазіаналітичність класу $\mathrm{C}\{\|A^p \delta_n\|\}$ є еквівалентною до квазіаналітичності класу $\mathrm{C}\{\sqrt{s_{2n+2p}}\}$ і згідно з властивостями квазіаналітичних класів цей клас еквівалентний до $\mathrm{C}\{\sqrt{s_{2p}}\}$.

3. Контрприклад Кошманенко В.Д..

Приклад 1.

Нехай $\mathcal{H}$ – (сепарабельний) гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, та $A = A^* > 1$ – необмежений самоспряжений оператор визначений на $\mathfrak{D}(A)$ в $\mathcal{H}$.

Побудуємо за оператором A оснащення простору $\mathcal{H}$. Покладемо $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(A)$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_+ := (A\cdot, A\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|_+ := \sqrt{(\cdot, \cdot)_+}$, а в якості $\mathcal{H}_-$ поповнюється $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- := \sqrt{(A^{-1}\cdot, A^{-1}\cdot)}$.

Виберемо для оператора A щільно визначене в $\mathcal{H}$ симетричне звуження $\dot{A}$, $\mathfrak{D}(\dot{A})$, із індексами дефекту $(1, 1)$. Факт щільності відповілного вкладення позначимо $\mathcal{H} \sqsupset \mathfrak{D}(\dot{A})$. Позначимо $M_+ := \mathfrak{D}(\dot{A})$ як множину в $\mathcal{H}_+$. Тоді ортогональне доповнення в $\mathcal{H}_+$ до M_+ позначимо $\{\eta_+\} = \mathcal{H}_+ \ominus M_+$. Їх образи в $\mathcal{H}$ позначимо відповідно $M_0 := AM_+$, $\eta_0 := A\eta_+$. Отже, маємо $\mathcal{H} = M_0 + \eta_0$. Зокрема $AM_+ = \dot{A}M_+ = M_0$.

З книги

Кошманенко В., Дудкін М.Є. Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. Праці інституту математики НАН України т.96, Київ 2013. 320 с.

Розділ 6, Теореми 6.1.1, 6.1.4 та подальші теореми, $\mathcal{H} \sqsupset M_+$ тоді і тільки тоді, коли $\eta_0 \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_+$, а також $\mathcal{H}_- \sqsupset M_0$.

Оператор A можна продовжити за неперервністю на $\mathcal{H}_-$, як оператор із областю визначення $\mathcal{H}$.

Таким чином побудована діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}_- & \supset & \mathcal{H} & \supset & \mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(A) \\
 & & \shortparallel & & \shortparallel \\
 & \sqsupset & M_0 & \sqsupset & M_+ = \mathfrak{D}(\dot{A}) \\
 & & \oplus & & \oplus \\
 & & \{\eta_0\} & & \{\eta_+\}
\end{array}$$

Виберемо далі інше відмінне від A самоспряжене розширення $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ в $\mathcal{H}$ оператора $\dot{A}$, але таке, для простоти, аби також $\tilde{A} > 1$.

Побудуємо вже за оператором $\tilde{A}$ оснащення простору $\mathcal{H}$. Покладемо тепер $\tilde{\mathcal{H}}_+ = \mathfrak{D}(\tilde{A})$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)\tilde{}_+ := (\tilde{A}\cdot, \tilde{A}\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|\tilde{}_+ := \sqrt{(\cdot,\cdot)\tilde{}_+}$, а в якості $\tilde{\mathcal{H}}_-$ поповнюється $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|\tilde{}_- := \sqrt{(\tilde{A}^{-1}\cdot, \tilde{A}^{-1}\cdot)}$.

Для оператора $\tilde{A}$ щільно визначене в $\mathcal{H}$ симетричне звуження є те саме $\dot{A}$, $\mathfrak{D}(\dot{A})$, із індексами дефекту $(1,1)$; $\mathcal{H} \sqsupset \mathfrak{D}(\dot{A})$. Позначимо ту саму $M_+ := \mathfrak{D}(\dot{A})$ як множину але в $\tilde{\mathcal{H}}_+$. Тоді ортогональне доповнення в $\tilde{\mathcal{H}}_+$ до M_+ позначимо $\{\tilde{\eta}_+\} = \tilde{\mathcal{H}}_+ \ominus M_+$. Їх образи в $\mathcal{H}$ будуть ті ж самі $M_0 := AM_+$, $\eta_0 := A\eta_+$. Отже, маємо так само $\mathcal{H} = M_0 + \eta_0$. Зокрема $\tilde{A}M_+ = \dot{A}M_+ = M_0$.

Аналогічно, з книги

Кошманенко В., Дудкін М.Є. Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. Праці інституту математики НАН України т.96, Київ 2013. 320 с.

Розділ 6, Теореми 6.1.1, 6.1.4 та подальші теореми, $\mathcal{H} \sqsupset M_+$ тоді і тільки тоді, коли $\eta_0 \in \mathcal{H} \setminus \tilde{\mathcal{H}}_+$, а також $\tilde{\mathcal{H}}_- \sqsupset M_0$.

Оператор $\tilde{A}$ також можна продовжити за неперервністю на $\tilde{\mathcal{H}}_-$, як оператор із областю визначення $\mathcal{H}$.

Таким чином побудована друга діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\mathcal{H}}_- & \supset & \mathcal{H} & \supset & \tilde{\mathcal{H}}_+ = \mathfrak{D}(\tilde{A}) \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & \supseteq & M_0 & \supseteq & M_+ = \mathfrak{D}(\dot{A}) \\
 & & \oplus & & \oplus \\
 & & \{\eta_0\} & & \{\tilde{\eta}_+\}
\end{array}$$

Оператори A і $\tilde{A}$, як різні самоспряжені розширення спільного симетричного оператора $\dot{A}$ пов'язані формулою М.Крейна

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + b(\cdot, \eta_0)\eta_0,$$

де b – деяка константа.

Тепер очевидно, що норми $\tilde{\mathcal{H}}_-$ і $\mathcal{H}_-$ є різними і у той же час на M_0 вони однакові, тому що $(M_0, \eta_0) = 0$, а M_0 є щільною і в $\tilde{\mathcal{H}}_-$ і $\mathcal{H}_-$.

4. Контрприклади Ніжніка Л.П..

Приклад 1.

Розглянемо простір $L_2 := L_2[0, \pi]$ функцій інтегровних із квадратом на відрізку $[0, \pi]$. Нехай $(\cdot, \cdot)$ – його скалярний добуток. Як добре відомо, множина функцій $\mathfrak{D} = \{\sin nx\}$, $n \in \mathbb{N}$ є щільною в L_2 і $f(x) \equiv 1$ належить до L_2. Також відомо, що "1"має розклад в ряд Фур'є $1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x$.

Розглянемо інший новий простір $\widetilde{L_2} := \widetilde{L_2}[0, \pi]$, функції якого мають вигляд $\tilde{f} = f(x) \dot{+} f(0) \cdot 1 \in L_2$, де $\dot{+}$ означає пряму суму, і зі скалярним добутком у вигляді $(\tilde{f}, \tilde{g})^{\sim} = (f(x) \dot{+} f(0) \cdot 1, g(x) \dot{+} g(0) \cdot 1)^{\sim}$, та нормою

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|^{\sim 2} =& (\tilde{f}, \tilde{f})^{\sim} = (f(x) \dot{+} f(0) \cdot 1, f(x) \dot{+} f(0) \cdot 1)^{\sim} \\
=& (f(x), f(x)) + 2f(0)(f(x), 1) + f(0)^2(1, 1).
\end{aligned}$$

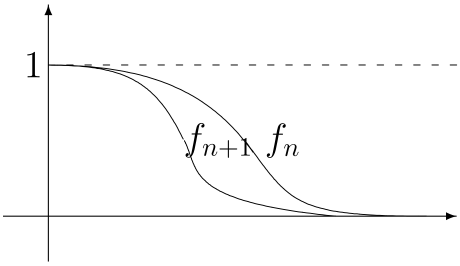
Не важко перевірити, що аксіоми скалярного добутку та норми виконуються. Очевидно, що $(\cdot, \cdot) \restriction \mathfrak{D} = (\cdot, \cdot)^{\sim} \restriction \mathfrak{D}$, тому що $\sin n0 = 0$.

Отже, простори L_2 і $\widetilde{L_2}$, які збігаються на щільній множині $\mathfrak{D}$ і мають однакову норму на цією множиною, побудовані. Покажемо, що ці норми різні поза їх спільною множиною.

Візьмемо $E = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in (0, \pi] \end{cases}$, тоді, очевидно $\|E\|_{L_2} = 0$, але

$$\|E\|^{\sim} = (E, E)^{\sim} = (E \dot{+} 1 \cdot 1, E \dot{+} 1 \cdot 1)^{\sim} = (E, E) + 2 \cdot 1 \cdot (E, 1) + 1^2(1, 1) = 1.$$

Покажемо, що норми не еквівалентні. Виберемо послідовність вигляду



яка прямує до E, тобто $f_n \longrightarrow E$. Очевидно $f_n \xrightarrow{L_2} 0$ і $f_n(0) = 1$. Але разом із тим $\|f_n(x)\|^{\sim 2} \xrightarrow{\tilde{L_2}} \frac{1}{2}$. Дійсно

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - \frac{1}{2}\|^{\sim 2} &= (f_n(x) - \frac{1}{2}, f_n(x) - \frac{1}{2})^{\sim} \\
&= ([f_n(x) - \frac{1}{2}]\dot{+}(f_n(x) - \frac{1}{2})|_{x=0} \cdot 1, [f_n(x) - \frac{1}{2}]\dot{+}(f_n(x) - \frac{1}{2})|_{x=0} \cdot 1) \\
&= (([f_n(x) - \frac{1}{2}]\dot{+}(1 - \frac{1}{2})), ([f_n(x) - \frac{1}{2}]\dot{+}(1 - \frac{1}{2}))) = (f_n(x), f_n(x)) \\
&= \|f_n(x)\|^{\sim 2} \xrightarrow{\tilde{L_2}} 0
\end{aligned}$$

при $n \to 0$.

Приклад 2.

Розглянемо простір $L_2 := L_2[1, \infty]$ функцій інтегровних із квадратом на півосі $[1, \infty]$. Нехай $(\cdot, \cdot)$ – його скалярний добуток. Як відомо, множина $\mathfrak{D} = C_0^\infty$ є щільною в L_2 і $E := E(x) = \frac{1}{x}$ належить до L_2, оскільки $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1$. Також відомо, що "$\frac{1}{x}$"можна наблизити функціями з C_0^∞.

Розглянемо інший новий простір $\tilde{L_2} := \tilde{L_2}[1, \infty]$ із функціями, які мають вигляд $\tilde{f} = f(x)\dot{+}f(\infty) \cdot E \in L_2$, де $\dot{+}$ означає пряму суму, $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)x < \infty$, і скалярним добутком $(\tilde{f}, \tilde{g})^{\sim} = (f(x)\dot{+}f(\infty) \cdot 1, g(x)\dot{+}g(\infty) \cdot 1)^{\sim}$, та нормою

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|^{\sim 2} = (\tilde{f}, \tilde{f})^{\sim} &= (f(x)\dot{+}f(\infty) \cdot E, f(x)\dot{+}f(\infty) \cdot E)^{\sim} \\
&= (f(x), f(x)) + 2f(\infty)(f(x), E) + f(\infty)^2(E, E).
\end{aligned}$$

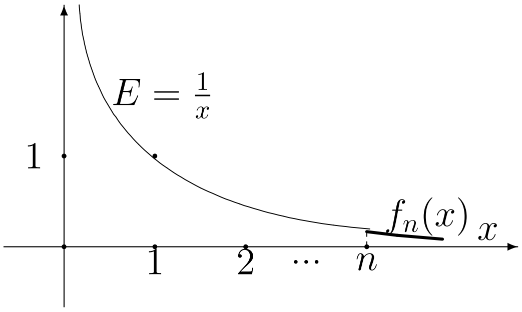
Не важко перевірити, що аксіоми скалярного добутку та норми виконуються. Очевидно, що $(\cdot, \cdot) \restriction \mathfrak{D} = (\cdot, \cdot)^{\sim} \restriction \mathfrak{D}$, тому що $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)x = 0$ для $f \in \mathfrak{D}$.

Отже, простори L_2 і $\tilde{L_2}$, які збігаються на щільній множині $\mathfrak{D}$ і мають однакову норму на цією множиною, побудовані. Покажемо, що ці норми різні поза їх спільною множиною.

Візьмемо E, тоді, очевидно $\|E\|_{L_2} = 0$, але

$$\|E\|^{\sim} = (E, E)^{\sim} = (E + E, E + E)^{\sim} = 4(E, E) = 4 \neq 1.$$

Покажемо, що норми не еквівалентні. Виберемо послідовність вигляду:



тобто $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1, n); \\ \frac{1}{x}, & x \in [n, \infty] \end{cases}$

Очевидно $f_n(x) \xrightarrow{L_2} 0$. Але разом із тим $f_n(x) \xrightarrow{\tilde{L_2}} \frac{1}{2}E$. Дійсно

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2}E - f_n\|^{\sim 2} &= (\frac{1}{2}E - f_n, \frac{1}{2}E - f_n)^{\sim} \\
&= ((\frac{1}{2}E - f_n)\dot{+}\{\frac{1}{2}E(\infty) - f_n(\infty)\}E, (\frac{1}{2}E - f_n)\dot{+}\{\frac{1}{2}E(\infty) - f_n(\infty)\}E) \\
&= \int\limits_1^\infty (\frac{1}{2}E - f_n + \frac{1}{2}E - E)(\frac{1}{2}E - f_n + \frac{1}{2}E - E)dx \\
&= \int\limits_1^\infty f_n^2 dx \longrightarrow 0, \quad n \to 0.
\end{aligned}$$

Приклад 3.

Тепер неважко змоделювати дискретний аналог приклада 2. А саме, розглянемо простір l_2 – сумовних із квадратом послідовностей $f = (f_n)$. Нехай $(\cdot, \cdot)$ – його скалярний добуток. Як відомо, множина скінчених послідовностей $\mathfrak{D}$ є щільною в l_2 і $E := \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ належить до l_2, оскільки $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$. Також відомо, що E можна наблизити послідовностями з $\mathfrak{D}$.

Розглянемо новий простір $\tilde{l_2}$ із елементами вигляду $\tilde{f} = f\dot{+}f(\infty) \cdot E \in l_2$, де $\dot{+}$ означає пряму суму, $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f_n n < \infty$, і скалярним добутком у вигляді $(\tilde{f}, \tilde{g})^{\sim} = (f\dot{+}f(\infty) \cdot 1, g\dot{+}g(\infty) \cdot 1)^{\sim}$, та нормою

$\|\tilde{f}\|^{\sim 2} = (\tilde{f}, \tilde{f})^{\sim} = (f\dot{+}f(\infty) \cdot E, f\dot{+}f(\infty) \cdot E)^{\sim} = (f, f) + 2f(\infty)(f, E) + f(\infty)^2(E, E).$

Не важко перевірити, що аксіоми скалярного добутку та норми виконуються. Очевидно, що $(\cdot,\cdot) \restriction \mathfrak{D} = (\cdot,\cdot)^{\tilde{}} \restriction \mathfrak{D}$, тому що $f(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} f_n n = 0$ для $f \in \mathfrak{D}$.

Отже, простори l_2 і $\tilde{l_2}$, які збігаються на щільній множині $\mathfrak{D}$ і мають однакову норму на цією множиною, побудовані. Покажемо, що ці норми різні поза їх спільною множиною.

Візьмемо E, тоді, очевидно $\|E\|_{l_2} = 0$, але

$$\|E\|^{\tilde{}} = (E,E)^{\tilde{}} = (E+E, E+E)^{\tilde{}} = 4(E,E) = 4 \neq 1.$$

Не еквівалентність норм тепер є очевидною для послідовності

$$E_n(x) = \begin{cases} 0, & n \in [0, n-1]; \\ \frac{1}{n}, & n \in [n, \infty] \end{cases} ,$$

тобто

$$E_n = (0,0,...,0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},...) \xrightarrow{l_2} 0, \quad E_n = (0,0,...,0,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},...) \xrightarrow{\tilde{l}_2} \frac{1}{2}E.$$

Література

1. *Березанский Ю.М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. -– Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с., English transl., Amer. Math., Soc., Providence, R.I., 1968. — 450 p.

2. *Березанский Ю.М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.

3. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ: Курс лекций. – Київ: Вища шк., 1990. – 600 с.